Robotique: modélisation et commande

GMC714 - Devoir no2
Cinématique des bras robotiques

Préparé par

Pr. Alexandre Girard

Université de Sherbrooke

Instructions:

Vous pouvez faire les calculs à la main ou avec un script Matlab ou Python.
Vous pouvez consulter vos collègues pour vous entraider, mais chacun doit individuellement effectuer une résolution et produire un devoir.
La remise doit être un seul *pdf* qui contient tous vos résultats et calculs.

Évaluation selon une échelle descriptive globale:

A : L'étudiant arrive à toute les solutions, avec seulement des erreurs mineures, et démontre qu'il maîtrise les notions abordées dans le devoir.
B : L'étudiant n'arrive pas à obtenir toutes les solutions, mais démontre qu'il a en bonne partie assimilé les notions abordées dans le devoir du à un effort soutenu de résoudre chacun des numéros.
C : L'étudiant n'arrive pas à obtenir la majorité des solutions, ne démontre pas qu'il a assimilé les notions abordées dans le devoir et travaillé sérieusement sur chacun des numéros.
E : L'étudiant ne présente aucune démarche sérieuse.

1 Cinématique d'un bras robotisé

Compétences à développer:

- Utiliser les notions de vecteurs de position, bases vectorielles, matrices de rotation, etc. pour effectuer le calcul de la cinématique directe d'un robot manipulateur.
- Comprendre les enjeux et difficultés à inverser des fonctions non-linéaire: possibilité d'aucune solution possible, possibilité de plusieurs solutions possible, etc.
- Utiliser les notions de trigonométrie dans un contexte de cinématique.
- Calculer des dérivées partielles et des matrices Jacobiennes pour une fonction multi-variable.
- Comprendre graphiquement la notion d'une matrice singulière qui ne peut pas être inversée.

Le robot illustré à la Figure 1 est une configuration assez courante pour les 3 premiers joints d'un système robotique. La première partie du devoir est d'analyser la cinématique de ce robot.

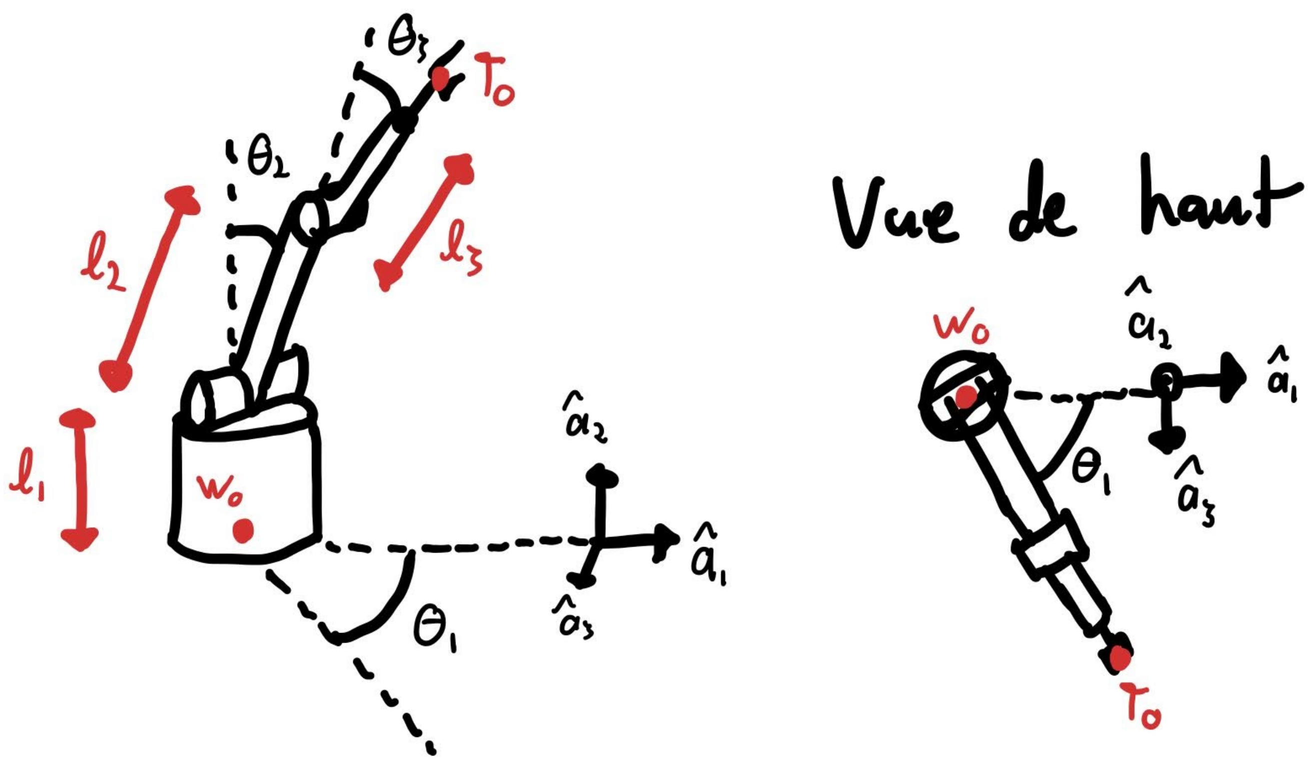

Figure 1: Robot à 3 joint rotatifs

1.1 Cinématique directe

Premièrement, déterminer la fonction de cinématique directe:

$$\underline{r} = f(\underline{q}) \tag{1}$$

qui détermine la position cartésienne de l'outil pour une configuration angulaire des joints. Le vecteur-colonne $\underline{r}$ contient les composantes dans la base a du vecteur position du point T_o (centre de l'outil) par rapport au point W_o (centre de la base du robot):

$$\underline{r} = \underline{r}^a_{T_o/W_o} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{r}_{T_o/W_o} = r_1\hat{a}_1 + r_2\hat{a}_2 + r_3\hat{a}_3 \tag{2}$$

et le vecteur-colonne $\underline{q}$ représente la configuration du robot dans l'espace des joint:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

La fonction f a trois entrées et trois sorties, elle peut être représentée comme une relation matricielle (c'est préférable!) ou bien comme trois fonctions scalaires de trois entrées:

$$r_1 = f_1(q_1, q_2, q_3) \tag{4}$$
$$r_2 = f_2(q_1, q_2, q_3) \tag{5}$$
$$r_3 = f_3(q_1, q_2, q_3) \tag{6}$$

1.2 Cinématique inverse

Deuxièmement, déterminez si il y a une solution explicite possible pour la fonction de cinématique inverse:

$$\underline{q} = f^{-1}(\underline{r}) \tag{7}$$

i.e. une façon de déterminer les angles pour une position de l'effecteur donnée:

$$\theta_1 = f_1^{-1}(r_1, r_2, r_3) \tag{8}$$
$$\theta_2 = f_2^{-1}(r_1, r_2, r_3) \tag{9}$$
$$\theta_3 = f_3^{-1}(r_1, r_2, r_3) \tag{10}$$

Si oui, déterminez cette fonction et son domaine (i.e. valeurs de $\underline{r}$ pour lesquelles une ou plusieurs solutions existent).

1.3 Cinématique différentielle

Troisièmement calculez la matrice Jacobienne J qui caractérise la relation de cinématique différentielle:

$$\dot{\underline{r}} = J(\underline{q})\dot{\underline{q}} \tag{11}$$

Rappel:

$$J(\underline{q}) = \frac{\partial f(\underline{q})}{\partial \underline{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} & \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} \tag{12}$$

1.4 Singularités

Finalement, déterminez les configurations pour lesquels la matrice J est singulière. Pour chacune de ces (familles de) configurations singulières: **a)** faites un dessin du robot dans la configuration singulière, **b)** déterminez et illustrez les trois vecteurs vitesses à l'effecteur que chacun des trois joints peut générer dans cette configuration, et **c)** déterminez et illustrez avec des vecteurs la ou les directions pour laquelle il est impossible de bouger l'outil du robot momentanément.